Statistika dan Probabilitas
Minggu 06
Peluang Bersyarat

Haryadi

Universitas Muhammadiyah Palangka Raya
October 30, 2023

Peluang Bersyarat

Dalam suatu eksperimen random peluang terjadinya suatu peristiwa bisa tergantung terjadinya peristiwa lain. Sebagi contoh, peluang lahirnya anak kedua perempuan bisa tergantung apakah anak pertama laki-laki atau perempuan.

Diketahui peristiwa E dan F. Peluang terjadinya E jika diketahui peristiwa F telah terjadi dinamakan **peluang bersyarat** (*conditional probability*), dituliskan $P(E|F)$.

Definisi 1 (Peluang bersyarat)**.** *Peluang terjadinya peristiwa E jika diketahui peristiwa F terjadi didefinisikan*

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}. \tag{1}$$

Contoh 1. Sebuah mata uang logam dilontarkan dua kali dan peluang setiap peristiwa elementer sama. Berapa peluang terjadinya sisi a pada lontaran kedua jika diketahui pada lontaran pertama sisi g telah terjadi?

Penyelesaian. Misalkan E peristiwa terjadinya sisi a pada lontaran kedua dan F peristiwa terjadinya sisi g pada lontaran pertama. Jadi $E = \{aa, ga\}$ dan $F = \{gg, ga\}$. Peluang yang dicari adalah

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(ga)}{P(gg, ga)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Contoh 2. Suatu mangkok berisi tujuh bola hitam dan lima bola putih. Diambil dua bola dari dalam mangkok tersebut dan bola yang telah terambil tidak dikembalikan ke dalam mangkok. Dianggap setiap bola memiliki peluang sama untuk terambil. Berapa peluang bola yang terambil keduanya adalah bola hitam?

Penyelesaian. Misalkan F dan E berturut-turut peristiwa bola pertama dan bola kedua adalah hitam. Karena bola pertama yang terambil hitam, maka ada enam bola hitam dan lima bola putih yang tersisa di dalam mangkok. Dengan demikian

$$P(E|F) = \frac{6}{11}.$$

Karena $P(F) = \frac{7}{12}$, maka peluang terambilnya kedua bola hitam adalah

$$P(E \cap F) = P(F)P(E|F) = \frac{7}{12}\frac{6}{11} = \frac{42}{132}.$$

Contoh 3. Pada suatu ujian perguruan tinggi, 25 persen mahasiswa tidak lulus matematika, 15 persen mahasiswa tidak lulus fisika, dan 10 persen maha siswa tidak lulus matematika dan fisika. Seorang mahasiswa dipilih secara random.

(a) Jika ia gagal fisika, berapa peluang ia tidak lulus matematika?

(b) Jika ia gagal matematika, berapa peluang ia tidak lulus fisika?

(c) Berapa peluang ia gagal matematika atau tidak lulus fisika?

Penyelesaian. Tuliskan $M =$ peristiwa mahasiswa yang tidak lulus matematika, F= persitiwa mahasiswa yang tidak lulus fisika. Diperoleh

$$P(M) = 0.25, \quad P(F) = 0.15, \quad P(M \cap F) = 0.10.$$

(a) Peluang ia tidak lulus matematika, diketahui ia tidak lulus fisika adalah

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3}$$

(b) Peluang ia tidak lulus fisika, diketahui ia tidak lulus matematika adalah

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}$$

(c) Peluang ia tidak lulus matematika atau tidak lulus fisika adalah

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30$$

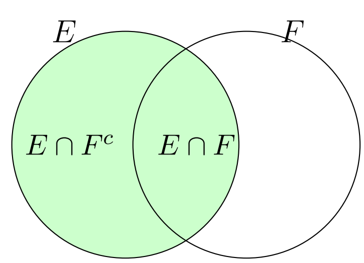
Rumus Bayes

Diketahui peristiwa E dan F (perhatikan Gambar 1). Peristiwa E dapat dituliskan

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c).$$

Karena $E \cap F$ dan $E \cap F^c$ saling asing, maka

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1 - P(F)) \end{aligned} \tag{2}$$



Gambar 1: $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$

Persamaan 2 menyatakan bahwa peluang peristiwa E merupakan rata-rata terbobot peluang bersyarat E diketahui F terjadi dan peluang bersyarat

E diketahui F tidak terjadi, dimana setiap peluang bersyarat tersebut sebesar bobot peristiwa bersyaratnya.

Persamaan 2 dapat diperumum dengan cara berikut. Misalkan $F_1, F_2, \cdots, F_n$ peristiwa yang saling asing dan

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S,$$

dimana

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n.$$

Peristiwa E dapat dituliskan dengan

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i).$$

Karena $F_1, F_2, \cdots, F_n$ peristiwa yang saling asing, maka $E \cap F_1, E \cap F_2, \cdots, E \cap F_n$ peristiwa yang saling asing. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F_1) + P(E \cap F_2) + \cdots P(E \cap F_n) \\ &= P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2) + \cdots + P(E|F_n)P(F_n) \qquad (3) \end{aligned}$$

Contoh 4. Tiga mesin A, B dan C masing-masing memproduksi $50\%, 30\%$ dan 20% dari total produk di suatu pabrik. Persentasi item produk yang cacat dari mesin-mesin ini masing-masing $3\%, 4\%$ dan 5%. Jika satu item produk diambil secara random, berapakah peluang item yang terambil tersebut cacat?

Penyelesaian. Misalkan X menyatakan peristiwa item yang terambil cacat. Berdasarkan persamaan 3,

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C) \\ &= (0.03)(0.50) + (0.04)(0.30) + (0.05)(0.20) \\ &= 0.037. \end{aligned}$$

Sekarang dimisalkan peristiwa E telah terjadi dan akan ditentukan satu dari peristiwa F_j terjadi. Dengan menggunakan persamaan 3

$$\begin{aligned} P(F_j|E) &= \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2) + \cdots + P(E|F_n)P(F_n)} \end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan 4 dinamakan rumus Bayes, diambil dari nama filosof Inggris Thomas Bayes. Jika peristiwa F_j diandaikan sebagai "hipotesis" tentang suatu masalah, maka rumus Bayes dapat diinterpretasikan bagaimana pendapat tentang hipotesis tersebut sebelum eksperimen dilaksanakan.

Contoh 5. Perhatikan kembali pabrik pada Contoh 4. Misalkan suatu item diambil secara random dan didapatkan cacat. Berapa peluang bahwa item tersebut diproduksi oleh mesin A.

Penyelesaian. Peluang bahwa item cacat diproduksi oleh mesin A adalah $P(A|X)$. Berdasarkan rumus Bayes

$$\begin{aligned} P(A|X) &= \frac{P(X|A)P(A)}{P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C)} \\ &= \frac{(0.03)(0.50)}{(0.03)(0.50) + (0.04)(0.30) + (0.05)(0.20)} \\ &= \frac{15}{27}. \end{aligned}$$

Peristiwa independen

Peristiwa E dan F dikatakan **independen**, jika peluang terjadinya peristiwa E tidak tergantung apakah peristiwa F terjadi atau tidak terjadi. Dalam hal ini $P(E|F) = P(E)$, dan substitusi ke dalam persamaan (1) pengertian independen dapat dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2. *Peristiwa E dan F dikatakan saling independen jika*

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F). \quad (5)$$

Jadi peristiwa E dan F independen jika peluang terjadinya kedua peristiwa bersamaan sama dengan hasil kali peluang terjadinya masing-masing peristiwa.

Contoh 6. Satu mata uang logam dilontarkan dua kali. E peristiwa terjadinya sisi a pada lontaran pertama dan F peristiwa terjadinya sisi g pada lontaran kedua, yaitu

$$E = \{aa, ag\} \quad \text{dan} \quad F = \{ag, gg\}.$$

Jika setiap peristiwa elementer memiliki peluang sama, maka

$$P(E \cap F) = P(ag) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) \cdot P(F) = P(aa, ag) \cdot P(ag, gg) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

sehingga $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$, dengan kata lain E dan F adalah peristiwa yang independen.

Contoh 7. Dua dadu dilontarkan satu kali. A menyatakan peristiwa terjadinya jumlah spot kedua sisi adalah enam dan B menyatakan peristiwa terjadinya spot sisi dadu pertama empat. Diperoleh

$$P(A \cap B) = P(\{4, 2\}) = \frac{1}{36}$$

dan

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216},$$

dan karena $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, maka peristiwa A dan B tidak independen.

Definisi peristiwa independen dapat diperluas untuk lebih dari dua peristiea.

Definisi 3. *Peristiwa $E_1, E_2, \cdots, E_n$ dikatakan independen, jika untuk setiap bilangan asli $r \leq n$ berlaku*

$$P(E_{1'} \cap E_{2'} \cap \cdots \cap E_r) = P(E_{1'}) \cdot P(E_{2'}) \cdots P(E_r).$$