Statistika
Materi 05: **Teknik Perhitungan**

Haryadi
haryadi_ump@yahoo.co.id

Universitas Muhammadiyah Palangka Raya
May 2, 2024

Prinsip Dasar Perhitungan

Dalam menghitung banyaknya anggota ruang sampel atau peristiwa, sering dijumpai proses penghitungan yang tidak mudah. Dalam bagian ini akan diuraikan prinsip dasar perhitungan yang bisa membantu dalam menghitung banyaknya anggota ruang sampel.

Teorema 1 (Prinsip dasar perhitungan)**.** *Jika peristiwa E_1 dapat terjadi n_1 cara dan peristiwa E_2 dapat terjadi n_2 cara, maka kedua peristiwa E_1 dan E_2 dapat terjadi dalam $n_1 \cdot n_2$ cara.*

Contoh 1. Diketahui E_1 himpunan abjad a, b, c, d dan E_2 himpunan bilangan $1, 2, 3$. Ada berapa pasangan yang terdiri dari satu abjad dan satu angka dari kedua himpunan?

Penyelesaian. Karena ada 4 abjad dan 3 bilangan, maka banyaknya pasangan tersebut adalah $4 \cdot 3 = 12$. Kedua belas pasangan adalah:

(a,1)	(a,2)	(a,3)
(b,1)	(b,2)	(b,3)
(c,1)	(c,2)	(c,3)
(d,1)	(d,2)	(d,3)

Contoh 2. Ada 5 cara menuju kota B dari kota A dan ada 9 cara menuju kota C dari kota B. Ada berapa cara menuju kota C dari kota A.

Penyelesaian. Ada $5 \cdot 9 = 45$ cara.

Teorema 2. *Jika peristiwa E_1 dapat terjadi dalam n_1 cara, peristiwa E_2 dapat terjadi dalam n_2 cara, $\cdots$, peristiwa E_k dapat terjadi dalam n_k cara, maka ke k peristiwa dapat terjadi dalam $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ cara.*

Contoh 3. Suatu kotak berisi 5 bola putih dan 6 bola hitam. Diambil secara random dua bola. Berapa peluang terambilnya satu bola putih dan satu bola hitam?

Penyelesaian. Banyaknya seluruh bola adalah 11. Banyaknya cara mengambil 2 bola dari 11 bola adalah $11 \cdot 10 = 110$. Jika bola pertama yang terambil adalah putih, maka ada $5 \cdot 6 = 30$ cara. Jika bola pertama yang terambil adalah hitam, maka ada $6 \cdot 5 = 30$ cara. Jadi peluang terambilnya satu bola putih dan satu bola hitam adalah

$$\frac{30+30}{110} = \frac{6}{11}.$$

Permutasi

Diketahui n bilangan bulat positif. Notasi $n!$ dibaca n *faktorial*, didefnnisikan sebagai berikut,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n,$$

dan $0! = 1$.

Contoh 4.

$$\begin{aligned}
2! &= 1 \cdot 2 = 2. \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24. \\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \\
8! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 120 \cdot 336 = 40320. \\
\frac{7!}{4!} &= \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210. \\
13 \cdot 12 \cdot 11 &= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = \frac{13!}{10!}.
\end{aligned}$$

Permutasi adalah susunan objek yang urutannya diperhatikan. Misalnya, susunan ab dan ba merupakan dua susunan berbeda. Jika dari objek n objek diambil r objek, maka susunan r objek yang tebentuk dinamakan permutasi n objek diambil r objek.

Contoh 5. Perhatikan empat abjad a, b, c dan d.

(a) $abcd$, $bdca$ dan $dcab$ merupakan permutasi 4 abjad.

(b) abc, acd, bda dan bca merupakan permutasi 4 abjad diambil 3 abjad.

Contoh 6. Diberikan lima abjad A, B, C, D dan E. Berapakah banyaknya permutasi 5 abjad diambil 2 abjad?

Penyelesaian. Permutasi tersebut adalah

AB	AC	AD	AE
BA	CA	DA	EA
BC	BD	BE	
CB	DB	EB	
CD	CE		
DC	EC		
DE	ED,		

yakni ada 20 permutasi.

Teorema 3. *Banyaknya permutasi n objek diambil r objek dituliskan $P(n, r)$, adalah*

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Bukti. Diketahui ada n objek. Pengambilan pertama ada n cara, pengambilan kedua ada $n-1$ cara, pengambilan ketiga ada $n-2$ cara, dan seterusnya, pengambilan ke r ada $(n-r+1)$ cara. Oleh karena itu berdasarkan prinsip dasar perhitungan akan ada

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= P(n, r) \end{aligned}$$

□

Contoh 7. Ada empat objek, namakan a, b, c dan d.

(a) Banyaknya permutasi 4 objek diambil 3 objek adalah

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

(b) Banyaknya permutasi 4 objek diambil 2 objek adalah

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12.$$

(c) Banyaknya permutasi 4 objek adalah

$$P(4, 4) = \frac{4!}{(4-4)!} = 24.$$

Permutasi dengan pengulangan

Kadang-kadang kumpulan objek ada yang sama. Misalnya pada kata "STATISTIKA", ada beberapa abjad yang sama. Permutasi yang disusun dari kumpulan objek demikian dinamakan permutasi dengan pengulangan.

Teorema 4. *Diketahui n objek dimana ada n_1 objek sama, n_2 sama, $\cdots$ n_r objek sama. Banyaknya permutasi n objek adalah*

$$\frac{n!}{n_1 \cdot ! n_2! \cdots n_r!}.$$

Contoh 8. Berapakah banyaknya permutasi 10 abjad dari abjad di dalam kata "STATISTIKA"?

Penyelesaian. Abjad S ada 2, T ada 3, A ada 2, I ada 2 dan K ada 1. Oleh karena itu banyaknya permutasi

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 75600.$$

Sampel terurut

Diantara persoalan di dalam kombinatorika adalah mengambil r objek dari sekelompok objek. Jika pengambilan objek ini dilakukan satu per satu secara berurutan, maka proses ini dinamakan **pengambilan sampel terurut berukuran** r. Ada dua cara pengambilan sampel terurut:

(1) Pengambilan sampel dengan pengembalian, yaitu objek yang telah diambil dikembalikan lagi sebelum pengambilan berikutnya. Jika ada n objek, maka berdasarkan prinsip dasar perhitungan akan ada

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r \text{ suku}} = n^r$$

sampel terurut berbeda berukuran n.

(2) Pengambilan sampel tanpa pengembalian, yaitu objek yang telah diambil tidak dikembalikan ke kelompok tersebut. Dengan demikian tidak ada

pengulangan objek dalam sampel terurut tersebut, sehingga sampel ini merupakan permutasi n diambil r. Oleh karena itu akan ada

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

sampel terurut berbeda berukuran n.

Contoh 9. Ada berapa susunan 4 abjad berbeda yang dapat dibentuk dari alfabet a sampai dengan z, jika

(a) Susunan tersebut boleh ada huruf yang sama

(b) Susunan tersebut tidak boleh ada huruf yang sama

Penyelesaian. Didalam soal ini $n = 26$ dan $r = 3$.

(a) Susunan tersebut boleh ada huruf yang sama, yang berarti abjad yang sudah terpilih bisa dipilih lagi. Dengan demikian ini merupakan sampel terurut dengan pengembalian. Jadi banyaknya sampel terurut adalah

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576.$$

(b) Susunan tersebut tida boleh ada huruf yang sama, yang berarti abjad yang sudah terpilih tidak bisa dipilih lagi. Jadi merupakan sampel terurut tanpa pengembalian. Oleh karena itu banyaknya sampel berbeda ada

$$P(26,3) = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{23!} = 24 \cdot 25 \cdot 26 = 15600.$$

Kombinasi

Kombinasi n objek adalah susunan n objek tanpa memperhatikan urutannya. Jadi susunan abc dan bac merupakan kombinasi yang sama.

Contoh 10. Diketahui kumpulan objek a, b, c dan d. Daftarkan semua kompbinasi dan permutasi tiga huruf dari keempat huruf.

Penyelesaian. Kombinasi dan permutasi tiga abjad dari empat abjad tersebut adalah:

Kombinasi	Permutasi
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

Perhatikan bahwa banyaknya permutasi yang teridiri atas abjad yang sama (satu baris) ada $3! = 6$ permutasi.

Teorema 5. *Banyaknya kombinasi n objek diambil r objek dituliskan $\binom{n}{r}$, adalah*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{1}$$

Bukti. Banyaknya permutasi yang terdiri atas objek yang sama ada $r!$. Oleh karena itu banyaknya kombinasi sama dengan banyaknya permutasi dibagi banyaknya permutasi yang terdiri atas objek yang sama, atau

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

□

Contoh 11. Ada berapa kombinasi yang bisa terjadi jika dari abjad-abjad a, b, c, d dan e diambil 3 abjad?

Penyelesaian. Dalam contoh ini, $n = 5$ dan $r = 3$. Jadi banyaknya kombinasi adalah

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10.$$

Contoh 12. Akan dibentuk panitia dengan 3 anggota. Jika ada 8 orang, ada berapa panitia berbeda yang dapat dibentuk?

Penyelesaian. Panitia tersebut merupakan kombinasi 8 objek diambil 3. Jadi ada

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

panitia berbeda yang dapat dibentuk.

Tugas

Tugas diupload paling lambat satu hari sebelum perkuliahan berikutnya.

1. Hitunglah yang berikut
   (a) $\frac{20!}{17!}$
   (b) $\frac{1000!}{998!}$
2. Sederhanakan bentuk berikut
   (a) $\frac{n!}{(n-2)!}$
   (b) $\frac{(n+3)!}{n!}$
3. Ada berapa bilangan tiga digit yang dapat dibentuk dari bilangan bulat 0 sampai dengan 9 jika
   (a) boleh ada bilangan yang sama
   (b) tidak bolah ada bilangan yang sama
4. Suatu tim volly-ball memiliki 10 orang pemain. Setiap regu terdiri atas 6 pemain. Ada berapa regu yang bisa dibentuk dari tim tersebut?
5. Ada berapa pin ATM 6 digit yang bisa dibentuk?