Matematika Diskrit

TEORI BILANGAN (2)

May 16, 2026

1 Representasi integer

Di dalam kehidupan sehari-hari kita terbiasa menggunakan bilangan desimal atau basis 10. Dari pengalaman sehari-hari kita mengetahui bahwa setiap integer positif n dapat dinyatakan dengan

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Misalnya, bilangan 4279 dapat dinyatakan dengan

$$4279 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 9.$$

Di dalam ilmu komputer sering digunakan basis selain basis 10, misalnya untuk melaksanakan aritmetika digunakan basis 2 (biner), untuk mengekspresikan karakter digunakan basis 8 (oktal) atau basis 16 (heksadesimal).

Teorema 1. *Diketahui b integer lebih besar 1. Setiap integer positif n dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk*

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0, \tag{1}$$

dengan k integer tak negatif, $a_0, a_1, \cdots, a_k$ integer tak negatif lebih kecil b dan $a_k \neq 0$.

Representasi di dalam persamaan (1) dinamakan **ekspansi basis b dari** n dan dituliskan $(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b$. Untuk desimal biasanya tidak perlu dituliskan basisnya, misalnya 265 berarti $(265)_{10}$.

Contoh 1. Perhatikan ekspansi basis 8 berikut

$$2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 4 = 156,$$

yang berarti ekspansi basis 8 dari 156 adalah $(234)_8$.

1.1 Ekspansi biner

Ekspansi basis 2 dinamakan **ekspansi biner**. Di dalam ekspansi biner terdiri dari digit 0 atau 1, yang berarti ekspansi basis dua tidak lain adalah string bit. Ekspansi biner digunakan di dalam komputer untuk merepresentasikan dan melakukan perhitungan aritmetik dengan integer.

Contoh 2. Carilah bilangan desimal yang ekspansi binernya $(10011101)_2$.

Penyelesaian. Dengan menguraikan

$$(10011101)_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 157,$$

sehingga bilangan desimal dengan represenasi biner di atas adalah 157.

1.2 Ekspansi oktal

Di dalam ekspansi basis 8 (oktal) digunakan delapan digit berbeda, yaitu $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan 7.

Contoh 3. Carilah bilangan desimal yang ekspansi oktalnya $(4035)_8$.

Penyelesaian. Dengan menguraikan

$$(4035)_8 = 4 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 = 2077,$$

yakni bilangan desimal yang ekspansi oktalnya $(4035)_8$ adalah 2077.

1.3 Ekspansi heksadesimal

Ekspansi heksadesimal menggunakan enambelas digit berbeda, yaitu

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E \text{ dan } F.$$

Huruf A, B, C, D, E dan F berturut-turut merepresentasikan bilangan desimal $10, 11, 12, 13, 14$ dan 15.

Contoh 4. Carilah bilangan desimal yang ekspansi heksadesimalnya $(3AC0E$

Penyelesaian. Dengan menguraikan

$$(3AC0E)_{16} = 3 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16 + 14 = 240654,$$

yang berarti $(3AC0E)_{16}$ merepresentasikan bilangan desimal 240654.

Teorema 2 (Algoritma Konversi Basis)**.** *Ekspansi basis b dari n dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut.*

(1) Bilangan n dibagi b sehingga didapatkan

$$n = bq_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b$$

(2) Selanjutnya q_0 dibagi b untuk mendapatkan

$$q_0 = q_1 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b,$$

(3) Ulangi langkah kedua sampai diperoleh hasil bagi 0.

Ekspansi basis b dari n adalah $(r_{k-1} \cdots r_1 r_0)_b$.

Contoh 5. Carilah ekspansi biner dari $(251)_{10}$.

Penyelesaian. Penerapan algoritma di atas dengan $n = 251$ dan $b = 2$ memberikan

$$\begin{aligned}
251 &= 2 \cdot 125 + 1 \\
125 &= 2 \cdot 62 + 1 \\
62 &= 2 \cdot 31 + 0 \\
31 &= 2 \cdot 15 + 1 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
1 &= 2 \cdot 0 + 1.
\end{aligned}$$

Sisa hasil pembagian di atas berturut-turut adalah $1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1$; oleh karena itu diperoleh

$$(251)_{10} = (11111011)_2.$$

Contoh 6. Carilah ekspansi basis 8 dari $(12457)_{10}$.

Penyelesaian. Dengan menerapkan algoritma di atas dengan $n = 12457$ dan $b = 8$,

$$\begin{aligned} 12457 &= 8 \cdot 1557 + 1 \\ 1557 &= 8 \cdot 194 + 5 \\ 194 &= 8 \cdot 24 + 2 \\ 24 &= 8 \cdot 3 + 0 \\ 3 &= 8 \cdot 0 + 3 \end{aligned}$$

Sisa rangkaian hasil di atas adalah $1, 5, 2, 0$ dan 3; oleh karana itu diperoleh

$$(12457)_{10} = (30251)_8.$$

Contoh 7. Carilah ekspansi basis 16 (heksadesimal) dari $(257983)_{10}$.

Penyelesaian. Penerapan algoritma di atas dengan $n = 257983$ dan $b = 16$ memberikan

$$\begin{aligned} 257983 &= 16 \cdot 16123 + 15 \\ 16123 &= 16 \cdot 1007 + 11 \\ 1007 &= 16 \cdot 62 + 15 \\ 62 &= 16 \cdot 3 + 14 \\ 3 &= 16 \cdot 0 + 3. \end{aligned}$$

Sisa hasil pembagian ini adalah $15, 11, 15, 14$ dan 3; oleh karena itu

$$(257983)_{10} = (3EFBF)_{16}.$$

Algoritma mencari ekspansi basis b dari n.

$$\begin{aligned} q &:= n \\ k &:= 0 \\ \text{while } q &\neq 0 \\ & \quad r_k := q \mod b \\ & \quad q := q \; div \; b \\ & \quad k := k + 1 \\ & \text{return } (r_{k-1}, \cdots, a_1, a_0) \end{aligned}$$

2 Konversi biner, oktal dan heksadesimal

Setiap digit oktal, desimal dan heksadesimal dapat dinyatakan dalam suatu blok yang terdiri atas digit biner yang diringkaskan pada tabel berikut.

Heksadesimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Biner	0	1	10	11	100	101	110	111
Heksadesimal	8	9	A	B	C	D	E	F
Biner	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

- Setiap digit heksadesimal dapat dinyatakan dalam satu blok digit biner yang terdiri atas empat bit. Dengan demikian dalam heksadesimal, pada tabel di atas bilangan 0 sampai dengan 7 bisa dituliskan dengan menambah bit 0 seperlunya di sebelah kiri sehinga menjadi empat digit. Misalnya $(1)_{16} = (1)_2 = (0001)_2$ dan $(3)_{16} = (11)_2 = (0011)_2$.

- Setiap digit oktal dapat dinyatakan dalam satu blok digit biner yang terdiri atas tiga digit, sehingga bilangan 0 sampai dengan 3 pada tabel di atas dapat pula dituliskan dengan menambahkan bit 0 seperlunya di sebelah kiri sehingga menjadi tiga digit. Dengan demikian

$$(0)_8 = (0)_2 = (000)_2, \qquad (1)_8 = (1)_2 = (001)_2,$$
$$(2)_8 = (10)_2 = (010)_2, \qquad (3)_8 = (11)_2 = (011)_2.$$

Contoh 8. Carilah ekspansi heksadesimal dari $(1100111011100)_2$.

Penyelesaian. Pengelompokan dalam empat digit bilangan biner tersebut dari digit paling kanan dan setelah digit 0 ditambahkan di sebelah kiri blok paling kiri memberikan

$$0001\ 1001\ 1101\ 1100,$$

yang berturut-turut menyatakan digit $1, 9, D$ dan C. Dengan demikian diperoleh

$$(1100111011100)_2 = (19DC)_{16}.$$

Contoh 9. Carilah ekspansi oktal dari $(1101011001)_2$.

Penyelesaian. Pengelompokan dalam tiga digit bilangan biner tersebut dari digit paling kanan memberikan (setelah dua digit 0 ditambahkan pada blok paling kiri)

$$001 \quad 101 \quad 011 \quad 001,$$

yang berturut-turut menyatakan bilangan $1, 5, 3$ dan 1. Dengan demikian diperoleh

$$(1101011001)_2 = (1531)_8.$$

Contoh 10. Carilah ekspansi biner dari $(542)_8$.

Penyelesaian. Dari tabel di atas, konversi biner untuk $5, 4$, dan 2 berturut-turut adalah 101, 100 dan 010. Dengan demikian

$$(542)_8 = (101100010)_2.$$

Contoh 11. Carilah ekspasi biner dari $(A7E)_{16}$.

Penyelesaian. Dari tabel konversi di atas ekspansi biner untuk $A, 7$ dan E berturut-turut adalah 1010, 0111, dan 1110. Dengan demikian

$$(A7E)_{16} = (1010\ 0111\ 1110)_2.$$

3 Operasi penjumlahan integer

Selanjutnya akan dipelajari aritmetika dengan ekspansi biner yang merupakan perkara sangat penting di dalam aritmetik komputer. Untuk pembahasan ini, dua bilangan biner dianggap memiliki jumlah digit yang sama. Pada kenyataannya banyaknya digit dua bilangan biner selalu dapat disama kan dengan menambahkan bit 0 disebelah kiri digit paling kiri pada bilangan yang lebih sedikit digitnya. Misalnya $(10100101)_2$ dan $(110110)_2$ dapat disamakan jumlah digitnya dengan menambah bit 0 pada bilangan kedua menjadi $(0110110)_2$.

Diberikan bilangan $a = (a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_1a_0)_2$ dan $b = (b_{k-1}b_{k-2} \cdots b_1b_0)_2$. Untuk menambahkan a dengan b,

1. Tambahkan bit paling kanan kedua bilangan. Akan dihasilkan

$$a_0 + b_0 = c_0 \cdot 2 + s_0,$$

dimana s_0 adalah digit paling kanan pada jumlah $a + b$ dan c_0 adalah bit 0 atau 1.

2. Tambahkan dua digit paling kanan kedua dari bilangan a dan b lalu tambah dengan c_0,

$$a_1 + b_1 + c_0 = c_1 \cdot 2 + s_1,$$

dimana s_1 adalah bit berikutnya dari kanan bilangan $a + b$ dan c_1 bit 0 atau 1.

3. Lanjutkan langkah 2 sehingga sampai pada tahap terakhir. Pada tahap terakhir adalah

$$a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-2} = c_{k-1} \cdot 2 + s_{k-1},$$

dan diambil $s_k = c_{k-1}$. Jumlah kedua bilangan adalah

$$a + b = (s_ks_{k-1} \cdots s_1s_0)_2.$$

Contoh 12. Diketahui $a = (101)_2$ dan $b = (1001)_2$. Carilah $a + b$.

Penyelesaian. Ingat $a = (101)_2 = (0101)_2$. Dengan menerapkan algoritma di atas,

$$a_0 + b_0 = 1 + 1 = 1 \cdot 2 + 0,$$

dari sini diperoleh $c_0 = 1$ dan $s_0 = 0$.

$$a_1 + b_1 + c_0 = 0 + 0 + 1 = 0 \cdot 2 + 1,$$

dari sini diperoleh $c_1 = 0$ dan $s_1 = 1$.

$$a_2 + b_2 + c_1 = 1 + 0 + 0 = 0 \cdot 2 + 1,$$

dari sini diperoleh $c_2 = 0$ dan $s_2 = 1$.

$$a_3 + b_3 + c_2 = 0 + 1 + 0 = 0 \cdot 2 + 1,$$

dari sini diperoleh $c_3 = 0$ dan $s_3 = 1$. Dari langkah terakhir $s_4 = c_3 = 0$, sehingga diproleh

$$a + b = (s_4 s_3 s_2 s_1 s_0)_2 = (01110)_2 = (1110)_2.$$

Dengan mengingat bahwa $1 + 1 = 10$, penjumlahan pada contoh diatas dapat diilustrasikan sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} 0101 & \\ \underline{1001} & + \\ 1110 & \end{array}$$

Algoritma Penjumlahan integer

procedure add(a, b: positive integers)

{ekspansi biner a dan b masing-masing adalah $(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)_2$) dan $(b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1b_0)_2$}

$$\begin{aligned} c &:= 0 \\ \text{for } j &:= 0 \text{ to } k-1 \\ d &:= \lfloor (a_j + b_j + c)/2 \rfloor \\ s_j &:= a_j + b_j + c - 2d \\ c &:= d \\ s_k &:= c \\ \text{return } (s_0, s_1, \cdots, s_k) \end{aligned}$$

4 Operasi perkalian integer

Didalam perkalian bilangan desimal, jika suatu bilangan dikalikan dengan 10, maka digit bilangan tersebut akan bergeser kekiri satu langkah dengan bertambahnya digit 0 diakhir bilangan tersebut, misalnya

$$403 \cdot 10 = 4030, \quad 403 \cdot 10^2 = 40300,$$

dan seterusnya. Prinsip ini bisa dijadikan motivasi dalam memahami perkalian bilangan biner.

Diberikan bilangan $a = (a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)_2$ dan $b = (b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1b_0)_2$. Ingat kembali bahwa b dapat dituliskan dengan

$$b = b_0 2^0 + b_1 2^1 + \cdots + b_{k-1}2^{k-1}.$$

Perkalian a dengan b dapat dituliskan

$$\begin{aligned} ab &= a(b_0 2^0 + b_1 2^1 + \cdots + b_{k-1}2^{k-1}) \\ &= a(b_0 2^0) + a(b_1 2^1) + \cdots + a(b_{k-1}2^{k-1}) \\ &= (ab_0)2^0) + (ab_1)2^1) + \cdots + (ab_{k-1})2^{k-1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa nilai b_j adalah 0 atau 1; oleh karena itu $ab_j = 0$ jika $b_j = 0$ dan $ab_j = a$ jika $b_j = 1$. Setiap perkalian a dengan 2, ekspansi biner a bergeser satu digit kekiri dengan bertambahnya 0 di akhir ekspansi. Misalnya, $(101)_2 \cdot 2 = (1010)_2$, $(101)_2 \cdot 2^2 = (10100)_2$ dan seterusya. Dengan demikian pada perkalian $(ab_j)2^j$, ekspansi (ab_j) bergeser kekiri j kali dan diakhir ekspansi ditambahkan sebanyak j bit 0. Oleh karena itu hasil kali ab diperoleh dengan menjumlahkan k integer $ab_j 2^j$ dengan $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$.

Contoh 13. Carilah hasil kali $a = (110)_2$ dan $b = (101)_2$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa $b_0 = 1, b_1 = 0$ dan $b_2 = 1$.

$$\begin{aligned} ab_0 2^0 &= (110)_2 \cdot 1 \cdot 2^0 = (110)_2 \\ ab_1 2^1 &= (110)_2 \cdot 0 \cdot 2^1 = (0000)_2 \\ ab_2 2^2 &= (110)_2 \cdot 1 \cdot 2^2 = (11000)_2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} ab &= ab_0 2^0 + ab_1 2^1 + ab_2 2^2 \\ &= (110)_2 + (0000)_2 + (11000)_2 \\ &= (11110)_2. \end{aligned}$$

Operasi perkalian ini dapat dituliskan seperti perkalian bilangan biasa dengan mengingat $1 \cdot 1 = 1$ dan $1 \cdot 0 = 0$. Untuk contoh di atas diilustrasikan berikut.

$$
\begin{array}{rl}
110 & \\
\underline{101} & \times \\
110 & \\
000 & \\
\underline{110} & + \\
11110 &
\end{array}
$$

Algoritma Perkalian Integer

procedure multiply(a, b: positive integers)

{ekspansi biner a dan b masing-masing adalah $(a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0)_2$) dan $(b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_1b_0)_2$}

for $j := 0$ to $k-1$

  if $b_j = 1$ then $c_j := a$ digeser j tempat

  else $c_j := 0$

  {$c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ adalah hasil hali parsial }

$p := 0$

for $j := 0$ to $k-1$

  $p := p + c_j$

return p {p adalah nilai ab}

Tes Formatif

Untuk mengukur tingkat penguasaan Saudara pada materi ini, kerjakan latihan berikut dan periksa jawaban Saudara dengan kunci jawab.

1. Konversikan ekspansi desimal berikut menjadi ekspansi biner.

   (a) 231
   (b) 4532
   (c) 97644

   jawab: (a) 1110011 (b) 1000110110100 (c) 10111110101101100.

2. Konversikan ekspansi biner berikut ke ekapansi desimal.

   (a) $(1111)_2$
   (b) $(1000000001)_2$
   (c) $(101010101)_2$

   jawab: (a) 31 (b) 513 (c) 341.

3. Konversikan ekspansi oktal berikut ke ekspansi biner.

   (a) $(572)_8$
   (b) $(1604)_8$
   (c) $(423)_b$

   jawab: (a) 101111010 (b) 1110000100 (c) 100010011,

4. Konversikan ekspansi heksadesimal berikut ke ekspansi biner.

   (a) $(80E)_{16}$
   (b) $(135AB)_{16}$
   (c) $(ABBA)_{16}$

   jawab:(a) 100000001110 (b) 10011010110101001 (c) 1010101110111010.

5. Konversikan $(101101111011)_2$ ke ekspansi heksadesimal.
   jawab: $(B7B)_{16}$

6. Konversikan $(7345321)_8$ ke ekspansi biner.
   jawab: 111011100101011010001.

7. Carilah jumlah dua ekspansi biner berikut.

   (a) $(1000111)_2 + (1110111_2$
   (b) $(11101111)_2 + (10111101)_2$
   (c) $(1010101010)_2 + (1111111111)_2$

   jawab: (a) 10111110 (b) 110101100 (c) 10010011010.

Tugas

1. Konversikan ekspansi desimal berikut menjadi ekspansi biner.
   (a) 321
   (b) 1023
   (c) 1000632
2. Konversikan ekspansi biner berikut ke ekapansi desimal.
   (a) $(11011)_2$
   (b) $(1010110101)_2$
3. Konversikan ekspansi biner berikut ke ekspansi oktal.
   (a) $(11110111)_2$
   (b) $(101010101010)_2$
4. Konversikan ekspansi heksadesimal $(BADFACED)_{16}$ ke ekspansi biner.
5. Konversikan $(1100001100011)_2$ ke ekspanasi heksadsimal.
6. Carilah jumlah dua ekspansi biner berikut.
   (a) $(1010101010)_2 + (111110000)_2$
   (b) $(1000000001)_2 + (1111111111)_2$
   (c) $(1010101010)_2 + (1111111111)_2$