

Matematika Diskrit

G R A F

Haryadi

haryadi_ump@yahoo.co.id

Program Studi Ilmu Komputer
Universitas Muhammadiyah Palangka Raya

June 7, 2026

1 Pengertian graf

Graf G tersusun atas dua objek:

- (1) Himpunan $V = V(G)$ yang anggotanya dinamakan **simpul** atau **verteks** atau **node**
- (2) Himpunan $E = E(G)$ yang anggotanya pasangan tak terurut dua simpul yang dinamakan **sisi** atau **edge**.

Untuk menekankan objek penyusunannya, graf G juga dituliskan dengan $G(V, E)$

Simpul u dan v dikatakan **adjasen** atau **bertetangga** jika ada sisi e yang menghubungkan kedua simpul, dalam hal ini dituliskan $e = [u, v]$, simpul u dan v dinamakan titik akhir sisi e . Hal ini juga dikatakan sisi e insiden pada simpul u dan v . Simpul digambarkan dengan suatu lingkaran atau titik; sisi digambarkan dengan kurva yang menghubungkan kedua simpul.

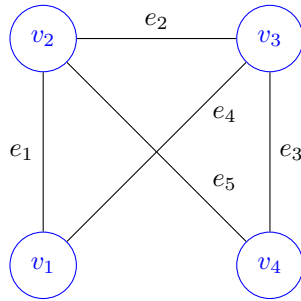
Contoh 1. Diberikan graf $G(V, E)$ dengan

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{dan} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

dengan

$$e_1 = [v_1, v_2], e_2 = [v_2, v_3], e_3 = [v_3, v_4], e_4 = [v_1, v_3], e_5 = [v_2, v_4].$$

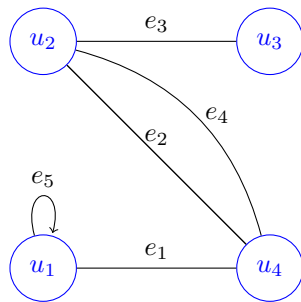
Graf $G(V, E)$ memiliki empat simpul yaitu simpul v_1, v_2, v_3 dan v_4 , dan lima sisi yaitu sisi e_1, e_2, e_3, e_4 dan e_5 . Sisi e_1 memnghubungkan simpul v_1 dan v_2 , sisi e_2 menghubungkan simpul v_2 dan v_3 , dan seterusnya. Graf ini dapat diilustrasikan dengan Gambar 1.



Gambar 1: Graf $G(V, E)$

Jika dua simpul pada suatu graf memiliki lebih dari satu sisi, maka graf demikian dinamakan **graf ganda**. Jika suatu simpul memiliki sisi, maka sisi ini dinamakan **loop**.

Contoh 2. Perhatikan graf G pada Gambar 2. Graf ini merupakan graf ganda, karena ada dua simpul, yaitu u_2 dan u_4 yang memiliki sisi e_2 dan e_4 . Sisi e_5 merupakan loop.



Gambar 2: Graf ganda

Derajat suatu simpul v adalah banyaknya sisi yang berisi simpul tersebut, dituliskan $deg(v)$. Perhatikan bahwa setiap sisi dihitung dua kali dalam penghitungan derajat simpul-simpul G , oleh karena itu berlaku teorema berikut.

Teorema 1. *Banyaknya derajat suatu simpul graf sama dengan dua kali banyaknya sisi graf tersebut.*

Sebagai contoh, graf pada Contoh 1,

$$deg(v_1) = 2, \quad deg(v_2) = 3, \quad deg(v_3) = 3, \quad deg(v_4) = 2,$$

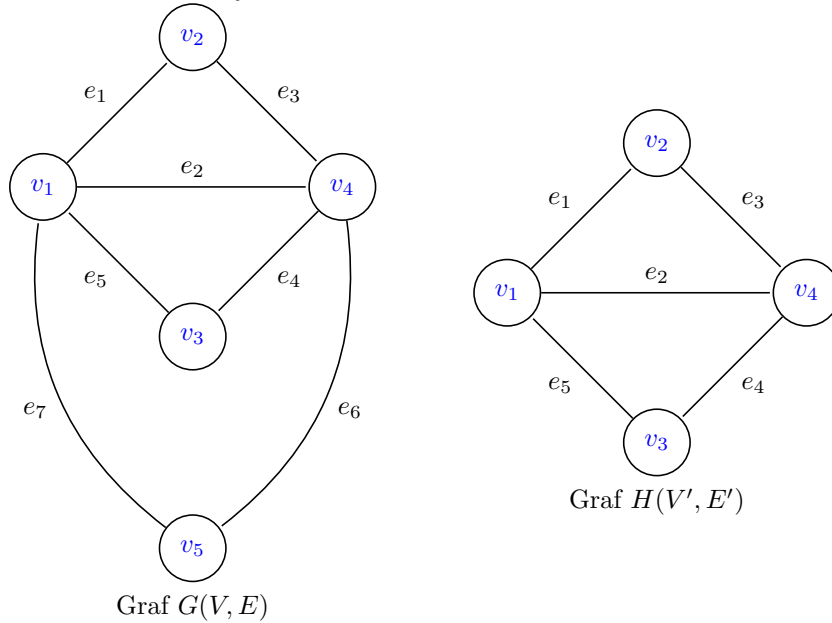
sehingga jumlah derajat adalah 10, yakni dua kali jumlah sisi. Hal ini sesuai dengan teorema di atas.

Suatu simpul yang memiliki derajat nol dinamakan **simpul terisolasi**. Suatu graf yang memiliki berhingga simpul dinamakan graf berhingga. Graf yang memiliki tak hingga simpul dinamakan graf tak hingga. Graf trivial adalah graf yang hanya memiliki satu anggota.

Graf bagian

Diberikan graf $G = G(V, E)$. Graf $H = (V', E')$ dinamakan graf bagian G jika simpul dan sisi H merupakan anggota simpul dan sisi G , yaitu jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$.

Contoh 3. Diberikan graf $G = G(V, E)$ dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ yang dinyatakan dalam gambar berikut.

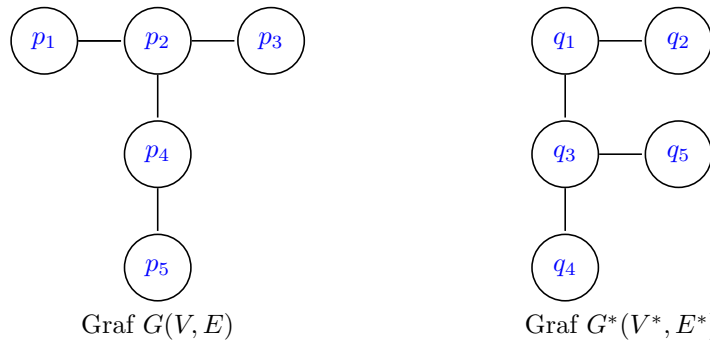


Graf $H(V', E')$ dengan $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ merupakan graf bagian G .

Isomorfik

Graf $G(V, E)$ dan $G^*(V^*, E^*)$ dikatakan **isomorfik** jika ada korespondensi satu-satu $f : V \rightarrow V^*$ sehingga jika $[u, v]$ adalah sisi di G , maka $[f(u), f(v)]$ adalah sisi di G^* . Dua graf isomorfik tidak dibedakan dari gambarnya (meskipun gambarnya nampak berbeda).

Contoh 4. Tunjukkan bahwa graf $G(V, E)$ dan $G^*(V^*, E^*)$ berikut isomorfik.



Penyelesaian. Didefinisikan korespondensi satu-satu $f : V \rightarrow V^*$ dengan

$$\begin{aligned}
 f(p_1) &= q_4 \\
 f(p_2) &= q_3 \\
 f(p_3) &= q_5 \\
 f(p_4) &= q_1 \\
 f(p_5) &= q_2.
 \end{aligned}$$

Dari korespondensi ini,

$$\begin{aligned}
 [p_1, p_2] &\implies [f(p_1), f(p_2)] = [q_4, q_3] \\
 [p_2, p_3] &\implies [f(p_2), f(p_3)] = [q_3, q_5] \\
 [p_2, p_4] &\implies [f(p_2), f(p_4)] = [q_3, q_1] \\
 [p_4, p_5] &\implies [f(p_4), f(p_5)] = [q_1, q_2],
 \end{aligned}$$

yang berarti persyaratan isomorfik dipenuhi.

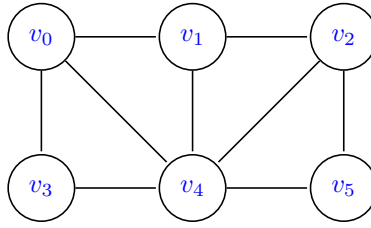
2 Keterhubungan

Rute (path) graf ganda G adalah barisan simpul dan sisi secara bergantian berbentuk

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

dimana setiap sisi e_i memuat simpul v_{i-1} dan v_i . Rute demikian juga dinamakan rute dari v_0 ke v_n . Banyaknya sisi dinamakan **panjang rute**. Rute ini dituliskan dengan (v_0, v_1, \dots, v_n) . Suatu rute dikatakan **tertutup** jika $v_0 = v_n$, yakni jika simpul awalnya sama dengan simpul akhir. **Rute sederhana** adalah suatu rute yang setiap simpulnya berbeda. Rute yang setiap sisinya berbeda dinamakan **trail**. Suatu **siklus** adalah suatu rute tertutup dengan panjang 3 atau lebih dimana setiap simpulnya berbeda kecuali simpul $v_0 = v_n$. Suatu siklus dengan panjang k dinamakan siklus- k .

Contoh 5. Perhatikan graf pada Gambar 3.



Gambar 3:

Perhatikan barisan berikut:

$$\begin{aligned} \alpha &= (v_3, v_0, v_1, v_4, v_0, v_1, v_2, v_5), & \beta &= (v_3, v_0, v_4, v_1, v_5) \\ \lambda &= (v_3, v_0, v_4, v_1, v_2, v_4, v_5), & \delta &= (v_3, v_0, v_4, v_2, v_5). \end{aligned}$$

Barisan α merupakan rute dari v_3 ke v_5 , tetapi bukan trail kerana sisi $[v_0, v_1]$ digunakan dua kali. Barisan β bukan rute, kerana sisi $[v_1, v_5]$ tidak ada. Barisan λ merupakan trail. Barisan δ merupakan rute sederhana dari v_3 ke v_5 yang panjangnya 4. Rute terpendek dari v_3 ke v_5 adalah (v_3, v_4, v_5) yang panjangnya 2.

Diberikan suatu rute dari simpul u ke simpul v . Pada rute ini tentu dapat dihapus sisi yang digunakan lebih dari satu kali hingga terbentuk rute sederhana dari u ke v .

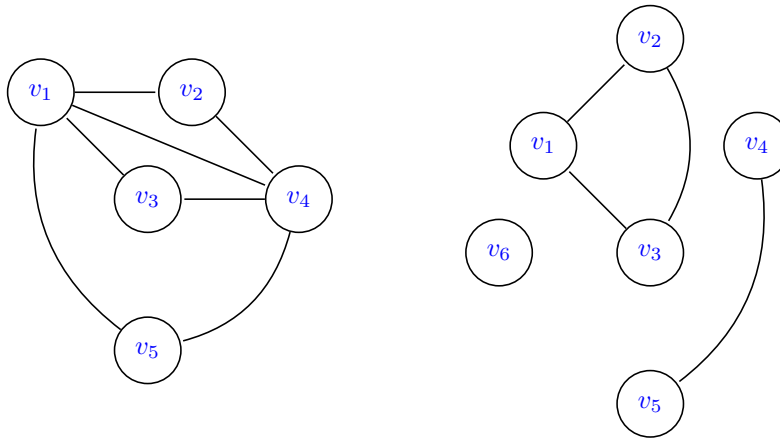
Teorema 2. Terdapat rute dari simpul u ke simpul v jika dan hanya jika terdapat rute sederhana dari simpul u ke simpul v

Graf G dikatakan **terhubung** (connected) jika ada rute yang menghubungkan setiap dua simpulnya.

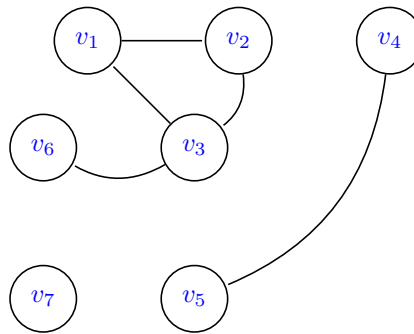
Contoh 6. Perhatikan graf di dalam Gambar 4. Graf di sebelah kiri adalah terhubung, sebab ada rute yang menghubungkan setiap dua simpulnya. Sedangkan graf di sebelah kanan tidak terhubung, sebab tidak setiap dua simpul ada rute yang mengubungkannya, misalnya tidak ada rute yang meghubungkan simpul v_2 dan v_4 .

Diketahui H graf bagian G . Graf H dinamakan **komponen terhubung** dari G jika H bukan subset grap bagian terhubung lainnya. Setiap graf dapat dipartisi atas komponen terhubungnya.

Contoh 7. Perhatikan graf di dalam Gambar 5. Graf ini memiliki tiga komponen terhubung, yaitu graf bagian dengan simpul-simpul $\{v_1, v_2, v_3, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$ dan $\{v_7\}$. Simpul v_7 merupakan simpul terisolasi dan tidak terhubung dengan sisi manapun, sehingga $deg(v_7) = 0$.



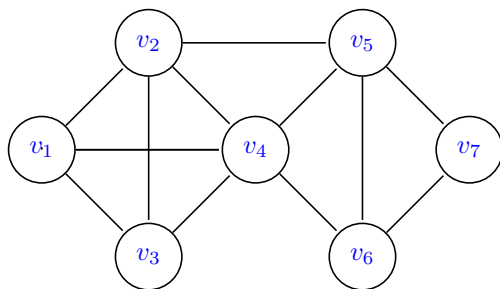
Gambar 4: Graf terhubung (kiri) dan graf tak terhubung (kanan)



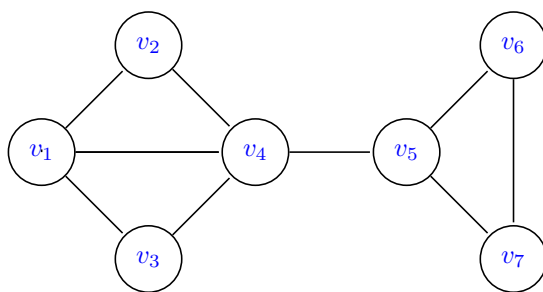
Gambar 5: Graf dengan 3 komponen terhubung

Diberikan graf G . **Jarak** antara simpul u dan v , dituliskan $d(u, v)$, adalah rute terpendek yang menghubungkan u dan v . **Diameter** G , dituliskan $diam(G)$, adalah jarak maksimum antara dua titik di G . Sebagai contoh, graf di dalam Gambar 6, $d(v_1, v_6) = 2$ dan $diam(G) = 3$.

Diberikan graf G . Simpul v di dalam G dinamakan **titik potong** G jika $G - v$ tidak terhubung. Disini notasi $G - v$ adalah himpunan semua anggota G selain v . Sisi e dinamakan **jembatan** jika $G - e$ tidak terhubung. Sebagai contoh, graf di dalam Gambar 7, simpul v_4 merupakan titik potong dan sisi $e = [v_4, v_5]$ merupakan jembatan, sebab jika sisi ini dihapus, maka graf G menjadi tak terhubung.



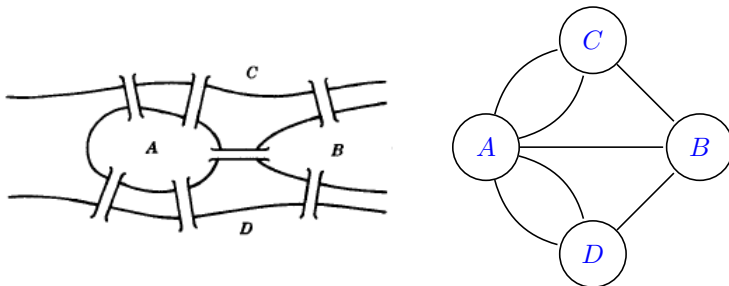
Gambar 6:



Gambar 7: Sisi $[v_4, v_5]$ merupakan jembatan

3 Graf yang dapat dilintasi

Pada abad ke 18, kota East Prussian di Königsberg meliputi 2 pulau dan 7 jembatan (sisi) seperti pada Gambar 8. Pertanyaannya adalah: Dimulai dari sebarang simpul dan berakhir di sebarang simpul, dapatkah seseorang berjalan melalui kota menyeberangi 7 jembatan dimana setiap jembatan hanya dilewati satu kali? Ahli matematika Swiss, L. Euler pada tahun 1736 membuktikan bahwa berjalan dengan lintasan demikian tidak mungkin bisa dilakukan.

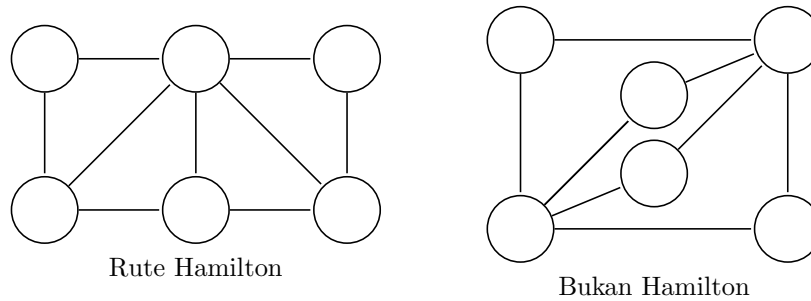


Gambar 8: Königsberg tahun 1736 dan representasi grafnya

Suatu graf dikatakan **dapat dilintasi** jika graf tersebut dapat digambarkan tanpa mengangkat pena dan tanpa mengulang sisi manapun. Dengan demikian graf dapat dilintasi jika ada suatu rute yang meliputi semua simpul dan menggunakan setiap sisi tepat satu kali. Rute demikian tentu merupakan trail dan dinamakan trail dapat dilintasi. Graf G dinamakan graf Euler jika terdapat trail tertutup terlintasi.

Teorema 3. *Suatu graf hingga terhubung adalah graf Euler jika dan hanya jika derajat setiap simpul genap.*

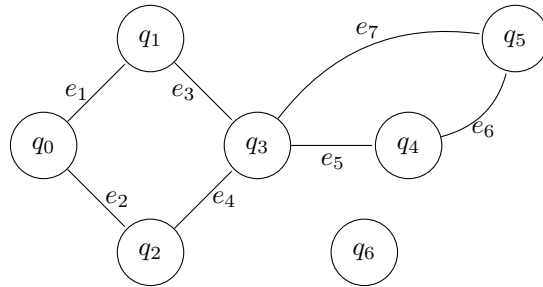
Di dalam graf Euler, yang menjadi perhatian adalah sisi graf. Didalam graf berikut yang menjadi perhatian adalah simpulnya. Rute Hamilton (diambil dari naman ahli matematika Irish, William Hamilton, 1803-1865), adalah suatu rute tertutup yang melewati setiap simpul tepat satu kali. Sebagai contoh, Gambar 9 sebelah kiri merupakan rute Hamilton, sedangkan graf sebelah kanan bukan rute Hamilton.



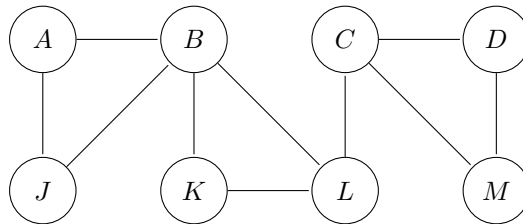
Gambar 9:

Tugas

1. Perhatikan graf G di dalam Gambar 23.
 - (a) Tuliskan secara formal graf $G(V, E)$ dengan V himpunan simpul dan E himpunan sisi seperti pada Contoh 1.
 - (b) Simpul manakan yang derajatnya paling besar dan berapa derajatnya?
 - (c) Berapakah $d(q_0, q_4)$?
 - (d) Berapakah diameter graf ini?
 - (e) Adakah simpul terasing? Sebutkan.
2. Perhatikan graf di dalam Gambar 24.



Gambar 10: Soal nomor 1



Gambar 11: Soal nomor 2

- (a) Carilah semua rute sederhana dari A ke L .
- (b) Carilah semua trail dari B ke C .
- (c) Carilah $diam(G)$.
- (d) Carilah siklus, titik potong dan jembatan.
- (e) Gambarkan graf bagian $H(V', E')$ dengan $V' = \{B, C, D, J, K\}$.

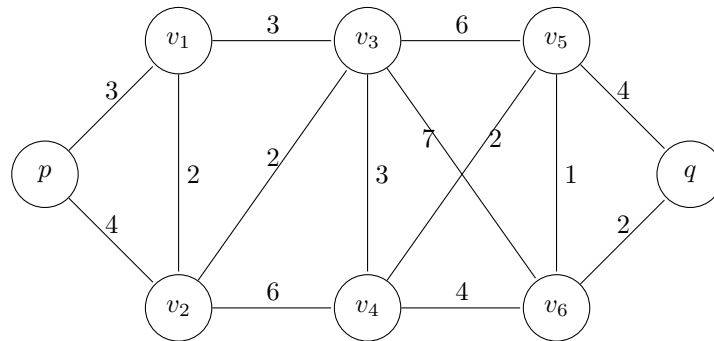
4 Graf terbobot dan graf Pembangun

Graf terbobot

Graf G dinamakan **graf berlabel** jika sisi-sisinya atau simpul-simpulnya diberi data dengan jenis tertentu. Jika setiap simpul e labelnya adalah bilangan non negatif $w(e)$, maka graf semacam ini dinamakan **graf terbobot**. Bilangan $w(e)$ dinamakan **bobot** atau **panjang** v .

Bobot (atau panjang) suatu rute di dalam graf terbobot adalah jumlah bobot sisi pada rute tersebut. Persoalan di dalam graf terbobot adalah mencari bobot (panjang) minimum suatu rute.

Contoh 8. Gambar 12 adalah graf terbobot. Bilangan yang terdapat pada setiap sisi menyatakan bobot sisi tersebut.



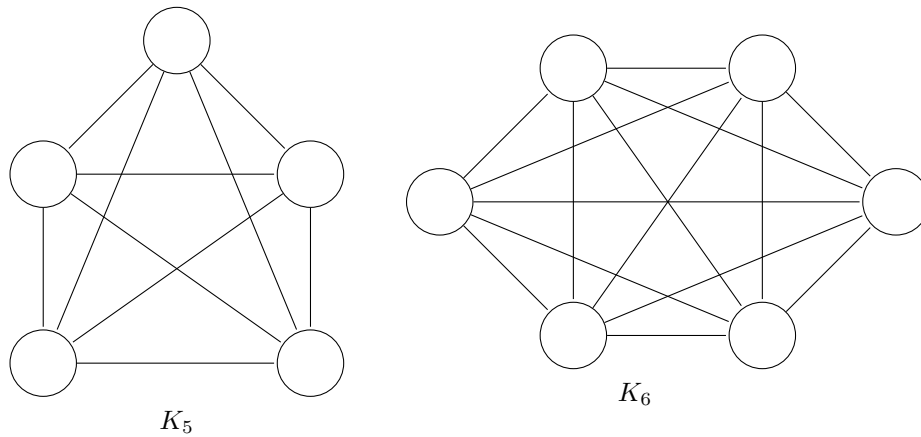
Gambar 12:

Di dalam graf ini, rute terpendek dari p ke q adalah rute

$$(p, v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, q)$$

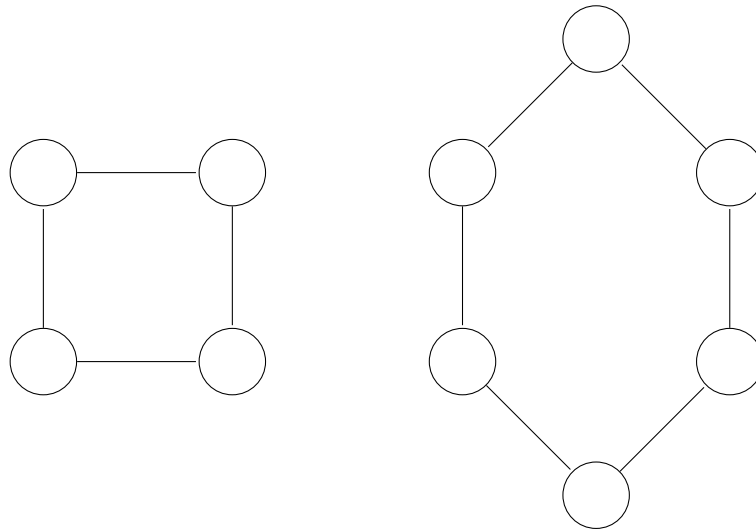
dengan bobot (panjang) $3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2 = 14$.

Suatu graf dinamakan **lengkap** jika setiap simpul terhubung dengan simpul lainnya di dalam graf tersebut. Dengan demikian setiap graf lengkap merupakan graf terhubung. Graf lengkap dengan n simpul dituliskan K_n . Sebagai contoh, graf pada Gambar 13 merupakan graf lengkap K_5 dan K_6 .



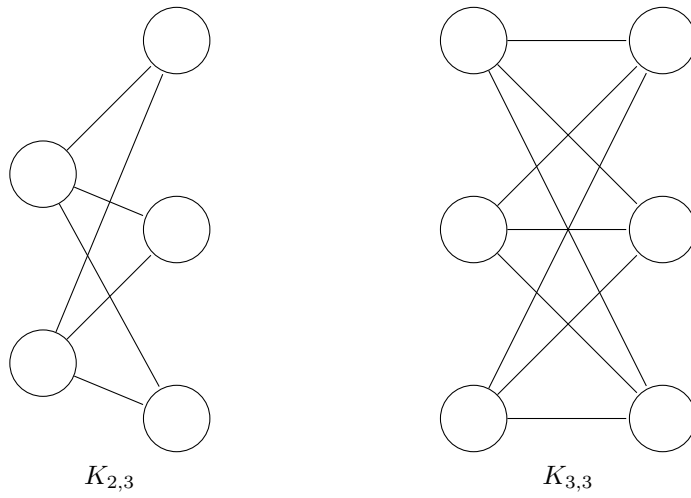
Gambar 13: Graf lengkap

Suatu graf dinamakan **reguler berderajat k** jika setiap simpulnya berderajat k , yakni setiap simpul derajatnya sama. Graf di dalam Gambar 14 merupakan graf reguler.



Gambar 14: Graf reguler

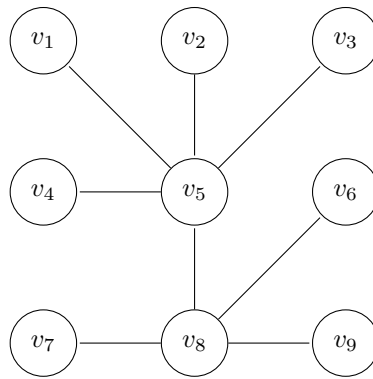
Suatu graf dinamakan **bipartite** jika simpul-simpulnya V dapat dipartisi menjadi dua bagian M dan N sehingga setiap sisi G menghubungkan suatu simpul di M ke suatu simpul di N . Jika setiap simpul M terhubung dengan setiap simpul N , maka dinamakan graf bipartite lengkap. Graf bipartite dituliskan dengan $K_{m,n}$ dengan m banyaknya simpul M dan n banyaknya simpul N .



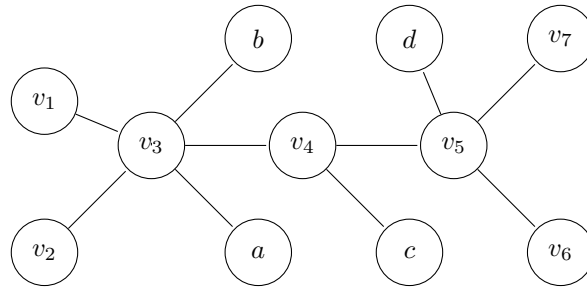
Gambar 15: Graf bipartit

Pohon

Graf T dinamakan **pohon** jika T terhubung dan T tidak memiliki siklus. Contoh graf pohon diberikan di dalam Gambar 4 dan Gambar 17.



Gambar 16: Pohon



Gambar 17: Pohon

Hutan adalah graf tanpa siklus; dengan demikian komponen terhubung dari hutan adalah pohon. Graf tanpa siklus dinamakan **bebas siklus**. Pohon dengan satu simpul tanpa sisi dinamakan pohon degenerasi.

Jelas bahwa di dalam suatu pohon hanya terdapat satu rute sederhana di antara dua simpul.

Diberikan pohon T . Misalkan tidak terdapat sisi $[u, v]$ di dalam T dan ditambahkan sisi $e = [u, v]$ ke T . Diperoleh rute sederhana dari u ke v di dalam T dan e membentuk siklus. Oleh karena itu T tidak lagi merupakan pohon.

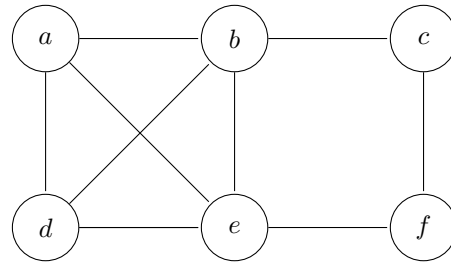
Sebaliknya, anggap ada sisi $e = [e, d]$ di dalam T . Jika kemudian sisi e ini dihapus dari T , maka T tidak lagi terhubung, sehingga T bukan pohon.

Teorema 4. Diberikan graf G dengan banyaknya simpul $n > 1$. Pernyataan berikut ekuivalen:

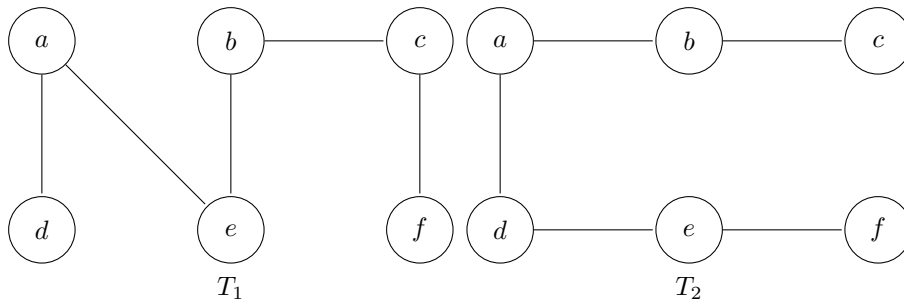
- (i) G merupakan pohon
- (ii) G bebas siklus dan memiliki $n - 1$ sisi
- (iii) G terhubung dan memiliki $n - 1$ sisi.

4.1 Pohon Pembangun

Diketahui G graf terhubung dan T graf bagian G . Graf T dinamakan **graf pembangun** G jika T pohon dan T mencakup semua simpul G . Sebagai contoh, Gambar 20 menyatakan graf terhubung G ; graf T_1 dan T_2 di dalam Gambar 19 menyatakan graf pembangun G .



Gambar 18: Graf G



Gambar 19: Graf Pembangun

Suatu graf bisa memiliki lebih dari satu pohon pembangun. Diberikan graf terhubung terbobot G , yakni G terhubung dan setiap sisi G memiliki bobot. **Pohon pembangun minimal** T adalah pohon pembangun yang total bobotnya sekecil mungkin. Perhatikan bahwa bobot pohon pembangun sama dengan jumlah bobot setiap sisi pada pohon pembangun tersebut.

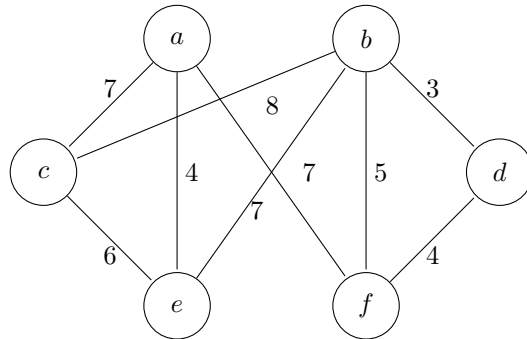
Berikut adalah algoritma untuk mencari pohon pembangun minimal graf terhubung terbobot G dengan n simpul.

Langkah 1 Susunlah sisi G dengan urutan bobot menurun.

Langkah 2 Proses secara berurutan, hapus setiap sisi dengan tetap mempertahankan agar graf tersisa tetap terhubung sehingga tersisa $n - 1$ sisi.

Langkah 3 Selesai.

Contoh 9. Carilah pohon pembangun minimal dari graf G pada Gambar 20.



Gambar 20: Graf G

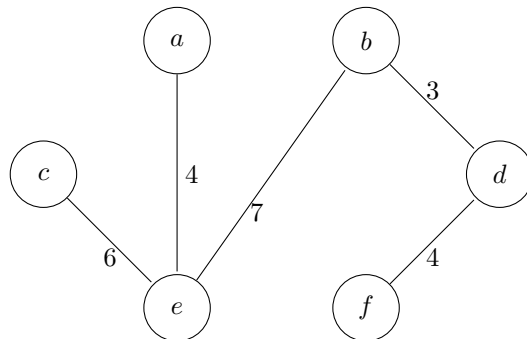
Penyelesaian. Pohon pembangun minimum akan dicari dengan menerapkan algoritma di atas. Pertama, sisi-sisi disusun dengan urutan bobot menurun. Kemudian secara berurutan dihapus sisi dengan tetap menjaga sehingga G tetap terhubung sehingga tersisa 5 sisi. Langkah ini menghasilkan:

Sisi	$[bc]$	$[af]$	$[ac]$	$[be]$	$[ce]$	$[bf]$	$[ae]$	$[df]$	$[bd]$
Bobot	8	7	7	7	6	5	4	4	3
Dihapus	ya	ya	ya	tidak	tidak	ya			

Dari sisi-sisi yang tersisa diperoleh pohon pembangun minimal yang memuat sisi-sisi:

$$[be], [ce], [ae], [df], [bd],$$

dengan jumlah bobot = $7+6+4+4+3=24$. Pohon pembangun minimal tersebut ditunjukkan di dalam Gambar 21.



Gambar 21: Pohon pembangun minimum graf G

Representasi matriks dari graf

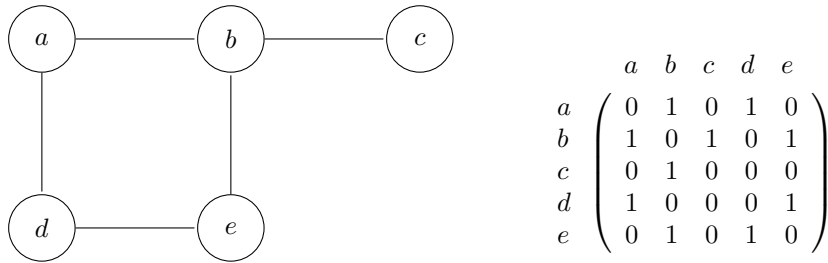
Bagaimanakan suatu graf direpresentasikan di dalam komputer. Semua informasi yang diperlukan untuk menyatakan suatu graf dapat disajikan dengan stau

struktur yang dinamakan matriks. Dengan struktur demikian, suatu graf dapat dengan mudah direpresentasikan di dalam komputer. Topik tentang matriks telah anda pelajari di dalam mata kuliah aljabar linear.

Diketahui graf G dengan m simpul yang telah diturutkan v_1, v_2, \dots, v_m . **Matriks ajasen** A dari graf G adalah matriks berukuran $m \times m$ dengan definisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } v_i \text{ ajasen } v_j \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

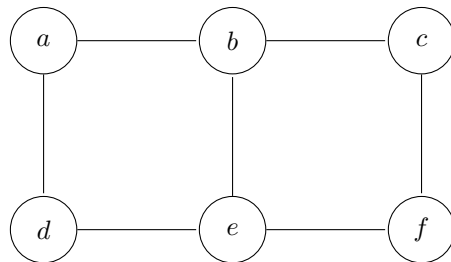
Contoh 10. Diberikan graf G di dalam Gambar 22. Matriks ajasen graf ini disajikan di sebelah kanan G . Entri matrik dicari berdasarkan definisi matriks ajasen. Misalnya, entri baris a kolom b adalah 1 sebab simpul a dan b ajasen. Entri baris c kolom d adalah 0 sebab simpul c dan d tidak ajasen. Demikian pula untuk entri yang lain dapat ditentukan nilainya.



Gambar 22: Graf G dan matriks ajasennya

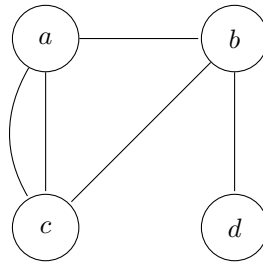
Ujaian Akhis Semester Genap 2020)

1. Carilah (gambarkan) semua pohon pembangun graf pada Gambar 23 berikut.



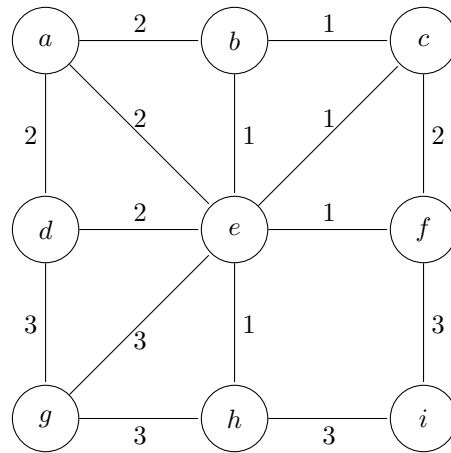
Gambar 23: Soal nomor 1

2. Carilah matriks ajasen graf pada Gambar 24 berikut.



Gambar 24: Soal 2

3. Carilah pohon pembangun minimal graf pada Gambar 25.



Gambar 25: Soal nomor 3