Matematika Diskrit

BARISAN

Haryadi
haryadi_ump@yahoo.co.id

Program Studi Ilmu Komputer
Universitas Muhammadiyah Palangka Raya
February 22, 2026

Barisan

Salah satu struktur diskrit yang banyak dibahas adalah barisan (*sequence*), yaitu suatu daftar terurut. Sebagai contoh, daftar terurut $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$ merupakan barisan.

Definisi 1. *Barisan adalah fungsi dengan domain integer tak negatif* $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$*. Peta fungsi ini di* n *dituliskan dengan* a_n*. Selanjutnya* a_n *dinamakan suku ke* n*. Barisan dengan suku-suku* a_n *dituliskan* $\{a_n\}$*.*

Pada seluruh pembahasan tentang barisan, notasi $\cdots$ berarti suku-suku a_n diteruskan tanpa batas. Barisan pada definisi di atas juga dinamakan barisan tak hingga. Barisan $\{a_n\}$ dapat dituliskan sukunya dengan

$$a_1, a_2, a_3, \cdots .$$

Suku a_n kadang-kadang dinyatakan dalam bentuk rumus.

Contoh 1. Perhatikan barisan $\{a_n\}$ dengan suku ke n dinyatakan dengan rumus

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Di dalam barisan ini, $a_1 = \frac{1}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$ dan seterusnya. Jadi jika dituliskan suku-sukunya maka barisan ini adalah

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$

Definisi 2. *Barisan* **geometrik** *adalah barisan yang berbentuk*

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^n, \cdots$$

dengan a dan r bilangan real. Bilangan a dinamakan **suku awal** *dan r dinamakan* **rasio**.

Contoh 2. Barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \frac{3}{2^n}$ merupakan barisan geometrik dengan suku awal $a = 3$ dan rasio $r = \frac{1}{2}$. Hal ini dapat dijelaskan dengan menuliskan kembali barisan ini menjadi

$$a_n = \frac{3}{2^n} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Suku-suku barisan ini adalah

$$a_0 = 3, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{3}{16}, \quad \cdots.$$

Contoh 3. Barisan $\{b_n\}$ dengan $b_n = (-1)^n$ dapat dituliskan

$$b_n = 1 \cdot (-1)^n,$$

sehingga merupakan barisan geometrik dengan suku awal $a = 1$ dan rasio $r = -1$. Barisan ini dapat dituliskan dengan

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots.$$

Contoh 4. Barisan $\{c_n\}$ dengan $c_n = 2 \cdot 3^n$ merupakan barisan geometri dengan suku awal $a = 2$ dan rasio $r = 3$. Barisan ini dapat dituliskan dengan

$$2, 6, 18, 54, 162, \cdots.$$

Definisi 3. *Barisan* **aritmetika** *adalah barisaan berbentuk*

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \cdots, a + nd, \cdots$$

dengan a dan d bilangan real. Bilangan a dinamakan **suku awal** *dan d dinamakan* **selisih** *atau* **beda**.

Contoh 5. Barisan $\{s_n\}$ dengan $s_n = 3 + 2n$ merupakan barisan aritmetik dengan suku awal 3 dan beda 2. Barisan ini dapat dituliskan

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots .$$

Contoh 6. Barisan $\{t_n\}$ dengan $t_n = 5-n$ merupakan barisan aritmetik dengan suku awal 5 dan beda -1, sebab $t_n = 5 - n = 5 + (-1)n$. Suku-suku barisan ini adalah

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \cdots .$$

Barisan yang sering digunakan dalam ilmu komputer adalah barisan berbentuk

$$a_1, a_2, a_3, \cdots , a_n,$$

yakni barisan yang hanya memiliki berhingga suku. Barisan demikian dinamakan **string**. String juga dituliskan dengan

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n.$$

Panjang string menyatakan banyaknya suku di dalam string. String yang tidak memiliki suku dinamakan **string kosong** dituliskan dengan λ. String kosong memiliki panjang nol.

Di atas telah dicontohkan bahwa barisan dapat dituliskan dengan mendaftarkan beberapa suku awal dan dilanjutkan dengan bentuk umum suku ke n. Suku ke n suatu barisan bisa tergantung pada suku-suku sebelumnya.

Definisi 4. Relasi rekurensi *barisan* $\{a_n\}$ *adalah suatu persamaan yang menyatakan* a_n *di dalam satu atau lebih suku dari suku-suku sebelumnya. Suatu barisan dinamakan* **penyelesaian** *suatu relasi rekurensi jika suku-suku barisan tersebut memenuhi relasi rekurensi.*

Contoh 7. Perhatikan barisan

$$1, 4, 7, 10, 13, \cdots .$$

Jika pada barisan ini $a_0 = 1$, maka suku ke n barisan ini dapat dituliskan sebagai persamaan suku sebelumnya, yaitu

$$a_n = a_{n-1} + 3, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Oleh karena itu $a_n = a_{n-1} + 3$ merupakan relasi rekurensi barisan tersebut.

Contoh 8. Diketahui barisan $\{a_n\}$ memenuhi relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 5$ untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$. Jika $a_0 = 3$, carilah nilai a_1, a_2 dan a_3.

Penyelesaian. Dari relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 5$ diperoleh

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 5 = 3 + 5 = 8 \\ a_2 &= a_1 + 5 = 8 + 5 = 13 \\ a_3 &= a_2 + 5 = 13 + 5 = 18. \end{aligned}$$

Contoh barisan dengan relasi rekurensi lebih dari satu suku adalah barisan berikut.

Definisi 5. Barisan Fibonacci $\{a_n\}$ *adalah barisan dengan suku-suku*

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots. \end{aligned}$$

Contoh 9. Carilah suku a_n dengan $n = 2, 3, 4, 5$ pada barisan Fibonacci.

Penyelesaian. Dari relasi rekurensi barisan Fibonacci diperoleh

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1 \\ a_3 &= a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3 \\ a_5 &= a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Definisi 6. *Suatu rumus dikatakan penyelesaian relasi rekurensi jika rumus tersebut merupakan bentuk umum suku ke n barisan. Rumus ini dinamakan rumus tertutup.*

Contoh 10. Diberikan relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dengan $n = 2, 3, 4, \cdots$. Tunjukkan bahwa barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 3n$ merupakan penyelesaian relasi rekurensi tersebut.

Penyelesaian. Karena $a_n = 3n$, maka $a_{n-1} = 3(n-1)$ dan $a_{n-2} = 3(n-2)$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= (6n-6) - (3n-6) = 3n \\ &= a_n, \end{aligned}$$

yang berarti $a_n = 3n$ merupakan penyelesaian relasi rekunesi tersebut.

Contoh 11. Tunjukan bahwa barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 2(-4)^n + 3$ merupakan penyelesaian relasi rekurensi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

Penyelesaian. Dari rumus $a_n = 2(-4)^n + 3$, diperoleh $a_{n-1} = 2(-4)^{n-1} + 3$ dan $a_{n-2} = 2(-4)^{n-2} + 3$. Oleh karena itu

$$\begin{array}{rcl} -3a_{n-1} + 4a_{n-2} & = & -3(2(-4)^{n-1} + 3) + 4(2(-4)^{n-2} + 3) \\ & = & -6(-4)^{n-1} - 9 + 8(-4)^{n-2} + 12 \\ & = & (-4)^{n-2}[-6(-4) + 8] + 3 \\ & = & (-4)^{n-2} \cdot 32 + 3 \\ & = & (-4)^{n-2} \cdot (-4)^2 \cdot 2 + 3 \\ & = & 2(-4)^n + 3 \\ & = & = a_n. \end{array}$$

Dalam banyak hal barisan hanya dituliskan beberapa suku awalnya. Untuk suku berikutnya perlu dicari rumus umumnya.

Contoh 12. Carilah rumus untuk barisan berikut:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$.

(b) $-1, 2, 5, 8, 11, \cdots$.

(c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$.

Penyelesaian. Suatu barisan bisa memiliki lebih dari satu rumus umum suku ke n. Rumus umum baisan di atas misalnya adalah

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ demgan $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) $a_n = 3n - 1$ dengan $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

(c) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ dengan $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Notasi $\sum$ adalah notasi penjumlahan, dibaca "sigma" dengan definisi

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n.$$

Contoh 13. (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{7}(-1)^i = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 = 0.$

Teorema 1. *Jika a dan r bilangan real dengan $r \neq 0$, maka*

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1}-a}{r-1}, & \textit{jika } r \neq 1 \\ (n+1)a, & \textit{jika } r = 1. \end{cases}$$

Bukti. Dituliskan $S_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i$ dengan $r \neq 1$. Jadi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$rS_n = \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}$$

Oleh karena itu

$$rS_n - S_n = ar^{n+1} - a$$

atau dituliskan kembali menjadi

$$(r-1)S_n = ar^{n+1} - a.$$

Selanjutnya dengan membagi kedua ruas dengan $r-1$ diperoleh $S_n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$.

Untuk $r = 1$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \sum_{i=0}^{n} a \cdot 1^i = \sum_{i=0}^{n} a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{(n+1) suku}} = (n+1)a.$$

□

Contoh 14. Carilah jumlah $\sum_{i=0}^{9} 3 \cdot 2^i$.

Penyelesaian. Pada jumlahan tersebut $a = 3$, $r = 2$ dan $n = 9$. Oleh karena itu

$$\sum_{i=0}^{9} 3 \cdot 2^i = \frac{3 \cdot 2^{9+1} - 3}{2-1} = 3 \cdot 2^{10} - 3 = 3 \cdot 1024 - 3 = 3069.$$

Contoh 15. Carilah jumlah $\sum_{i=0}^{10} \frac{5}{2^i}$

Penyelesaian. Perhatikan bahwa $\sum_{i=0}^{10} \frac{5}{2^i} = \sum_{i=0}^{10} 5 \cdot (\frac{1}{2})^i$, yakni $a = 5$, $r = \frac{1}{2}$ dan $n = 10$. Oleh karena itu

$$\sum_{i=0}^{10} \frac{5}{2^i} = \frac{5 \cdot (\frac{1}{2})^{11} - 5}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{5 \cdot (\frac{1}{2})^{11} - 5}{-\frac{1}{2}} = -5 \cdot (\frac{1}{2})^{10} + 10 = -\frac{5}{1024} + 10 = \frac{10235}{1024}.$$

Jumlahan kadang-kadang juga dalam bentuk $\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=l}^{m} a_i b_j$ yang dinamakan jumlahan ganda (double summation).

Contoh 16. Carilah $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} ij$.

Penyelesaian. Untuk setiap $i = 1, 2, 3$ dicari terlebih dahulu $\sum_{j=1}^{4} ij$. Jadi Untuk $i = 1$

$$\sum_{j=1}^{4} ij = \sum_{j=1}^{4} j = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

Untuk $i = 2$

$$\sum_{j=1}^{4} ij = \sum_{j=1}^{4} 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 20,$$

Untuk $i = 3$,

$$\sum_{j=1}^{4} ij = \sum_{j=1}^{4} 3j = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 30,$$

Dengan demikian

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} ij = 10 + 20 + 30 = 60.$$

Test formatif

1. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$. Carilah
   (a) a_0
   (b) a_1
   (c) a_3
2. Carilah suku a_8 dari barisan $\{a_n\}$ dengan
   (a) $a_n = 2^{n-1}$
   (b) $a_n = 1 + (-1)^n$
   (c) $a_n = 7$
   (d) $a_n = -(-2)^n$
3. Carilah lima suku pertama dari barisan yang relasi rekurensi dan kondisi awalanya sebagai berikut.
   (a) $a_n = 6a_{n-1}, \quad a_0 = 2.$
   (b) $a_n = a_{n-1}^2, \quad a_1 = 2.$

(c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$

(d) $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1.$

(e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \quad a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0.$

4. Carilah jumlah berikut

   (a) $\sum_{i=1}^{5} i^2.$

   (b) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$

   (c) $\sum_{i=1}^{6} (-1)^i$

   (d) $\sum_{i=1}^{4} 5 \cdot 3^i$

   (e) $\sum_{i=1}^{5} (\frac{1}{3})^i$

5. Carilah jumlah berikut

   (a) $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} (i+j).$

   (b) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} (3i - j)$

   (c) $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} ij^2$

Jawaban

1. (a) $a_0 = 3$

   (b) $a_1 = -1$

   (c) $a_3 = 71$

2. (a) $a_8 = 128$

   (b) $a_8 = 2$

   (c) $a_8 = 7$

   (d) $a_8 = -256$

3. (a) $a_1 = 12, a_2 = 72, a_3 = 432, a_4 = 2592, a_5 = 15552.$

   (b) $a_2 = 4, a_3 = 16, a_4 = 256, a_5 = 65536.$

   (c) $a_2 = 5, a_3 = 11, a_4 = 26, a_5 = 59.$

   (d) $a_2 = 6, a_3 = 21, a_4 = 426, a_5 = 1377.$

   (e) $a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 3, a_6 = 6, a_7 = 9.$

4. (a) 55.

   (b) 25/12

   (c) 0

   (d) 605

   (e) 121/81

5. (a) 110.

   (b) 45

   (c) 550

Tugas

Dikirim paling lambat **satu hari** sebelum perkuliahan berikutnya dalam format pdf **tidak lebih dari 1 MB**.

1. Carilan a_0, a_1, a_2 dan a_3 barisan $\{a_n\}$ dengan
   (a) $a_n = 2^n + 1$
   (b) $a_n = (n+1)^{n+1}$
   (c) $a_n = (-2)^n$
   (d) $a_n = 2^n + (-2)^n$
2. Carilah lima suku pertama dari barisan yang relasi rekurensi dan kondisi awalnya sebagai berikut.
   (a) $a_n = -2a_{n-1}, a_n = -1$
   (b) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -1$
   (c) $a_n = na_{n-1} + a_{n-2}^2, a_0 = -1, a_1 = 0.$
3. Carilah penyelesaian relasi rekurensi dengan kondisi awal berikut.
   (a) $a_n = -a_{n-1}, a_0 = 5$
   (b) $a_n = a_{n-1}, a_0 = 1$
   (c) $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = 2.$
4. Carilah jumlah berikut
   (a) $\sum_{i=1}^{8} 3 \cdot 4^i$
   (b) $\sum_{i=1}^{8} 2 \cdot (-3)^i$